Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 10

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

19 de julio de 2023

1. Demostrar $\sum u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \gamma^\mu p_\mu + m$.

Partiendo de las definiciones (8.4) del formulario;

$$u_r(\vec{p}) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi_r \end{pmatrix}$$

Donde $\chi_1 = \chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ y $\chi_2 = \chi_- = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$. Por lo que podemos escribir la suma como

$$\sum u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = (E+m)\begin{pmatrix} \sum \chi_r\chi_r^\dagger & \sum \chi_r\chi_r^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\sum \chi_r\chi_r^\dagger & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\sum \chi_r\chi_r^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix}\gamma^0 = \begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m} \end{pmatrix}$$

Donde he usado la fórmula 43.3; $\sum \chi_r\chi_r^\dagger = 1$. Podemos simplificar el producto $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2$ de la siguiente forma:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = p_i p_j \sigma^i\sigma^j = p_{(i}p_{j)}\sigma^i\sigma^j = p_i p_j \sigma^{(i}\sigma^{j)} = p_i p_j \delta^{ij} = \vec{p}^2 = E^2 - m^2 = (E+m)(E-m)$$

$$\sum u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m \end{pmatrix} = E\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m = p^\mu\gamma_\mu + m$$